Mémoire enseignement

Mathieux Tony

5 mai 2014

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire à pour but d'exposer un cours portant sur l'intégration à destination d'élèves de terminale S. Il sera composé, d'une part, d'un cours à proprement parlé, composé de définitions, propositions, exemples et exercices, et d'autre part d'une réflexion à visée pédagogique sur le cours présenté.

La première question qui se pose quand on veut enseigner est de savoir comment introduire les notions et objets avec lesquels on va travailler. La première partie du mémoire cherche donc à répondre à la question d'un élève de terminale : «Qu'est-ce qu'une intégrale ?». Une fois les notions introduites on veut faire travailler les élèves sur ces notions. Il faut donc voir les différentes techniques et applications. En ce qui concerne l'intégration, nous travaillerons principalement sur le calcul d'intégrales via la recherche de primitives.

Chapitre 2

Comment introduire l'intégration en terminale ?

Nous sommes face à des élèves de terminale, pas nécéssairement intéressés par les mathématiques et nous voulons leurs expliquer une nouvelle notion. Il faut choisir une approche des plus compréhensibles. Voyons un peu quelles sont les possibilitées. On peut voir 3 approches pour enseigner les mathématiques (pas seulement en ce qui concerne l'intégration).

On peut donner une définition alternative comme on le fait généralement pour la fonction exponentielle : on dit que c'est fonction dérivable égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0 ; on définit ensuite le logarithme comme fonction réciproque de l'exponentielle. Cette définition nécéssite seulement un cours sur la dérivation. Mais on aurait pu procéder autrement : après avoir fait un cours d'intégration on définit la fonction logarithme comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. On définit ensuite l'exponentielle comme fonction réciproque du logarithme. Ainsi on s'adapte aux notions déjà acquises par les élèves.

On peut poser une définition sans explications. C'est ce qu'on fait pour le produit scalaire : on ne parle pas de formes bilinéaires symétriques définies positives, on donne juste des formules calculatoires dont on remarque qu'elles sont bilinéaires et symétriques, et on remarque qu'elles donnent zéro quand les vecteurs sont orthogonaux (définie comme formant un angle droit).

On peut donner une version plus ou moins simplifiée de la «vraie» définition. C'est ce que nous allons faire pour l'intégration.

Nous allons donc donner une version simplifiée de l'intégrale de Riemann (quelque soit le niveau il faut commencer par l'intégrale de Riemann car l'intégrale de Lesbegue nécéssite la théorie de la mesure en plus du principe de construction débutant par l'intégrale des fonctions en escalier ou étagées). On commence par donner le cadre de la définition : au niveau de la terminale on va parler de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On évoquera quand même le cas des fonctions continues par morceaux et le cas d'un intervalle ouvert. En mettant de coté le programme de terminal, on pourrait se permettre d'aller jusqu'aux fonctions réglés mais ce ne sera pas fait dans ce cours.
On va débuter en parlant d'aire algébrique sous une courbe.On note f une fonction continue et positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a, b deux réels avec $a < b$.
L'aire comprise entre la courbe de f entre a et b et l'axe des abscisses est l'intégrale de a à b

de f, notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
On peut simplement expliquer le terme «aire algébrique» en disant que l'aire en dessous de l'axe des abscisses est compté négativement (dans le cas d'une fonction de signe quelconque).
On va suggérer le principe de construction de l'intégrale de Riemann (partant de l'intégrale des fonctions en escalier) en évoquant, sans forcément la nommer, la méthode des rectangles en intégration numérique. Cette méthode est bien adaptée puisque les élèves savent calculer l'aire d'un rectangle. On appoche l'aire sous la courbe par l'aire de rectangles en-dessous ou au-dessus de la courbe.
On explique que l'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux de même longueur (inutile de compliquer avec des intervalles de longueurs différentes), mais pour fixer les idées mieux vaut débuter avec des valeurs (par exemple $a = 0, b = 10$). Ceci constituera un exemple introductif. L'integrale de f entre a et b est la limite de la somme des aires des rectangles quand n tend vers l'infini.

Cette approche pourra être illustrée, à la fin du cours, par un TP sur ordinateur pour comparer une intégrale approchée par la méthode des rectangles avec la méthode exacte via le calcule d'une primitive (pour des fonctions dont on connait une primitive).

Chapitre 3

Définition de l'intégrale d'une fonction continue.

Nous avons abordé l'intégrale comme «l'aire sous la courbe». Donnons maintenant une définition de l'intégrale comme limite d'une suite, et qui coïncide avec la notion intuitive «d'aire sous la courbe». On commence par un cas particulier : on considère une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$ (par exemple la parabole $x \mapsto x^2$ sur $[0, 2]$).

On veut calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ c'est-à-dire l'aire du domaine D caractérisé par les inéquations $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Pour cela on encadre D par des rectangles (dont on sait calculer l'aire), on construit deux suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui représenteront l'approximation de l'aire de D par n rectangles. La construction des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'effectue comme suit : au rang n on construit $p = 2^n$ rectangle de même largeur $l_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, on nomme $r_1, \ldots, r_p$ les aires des rectangles contenus dans le domaine D et $s_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_p$, on nomme $R_1, \ldots, R_p$ les aires des rectangles contenant le domaine D et $S_n = R_1 + R_2 + \cdots + R_p$.

Exemple : au rang $n = 2$ on a $p = 4$ rectangles,

On veut définir $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme la limite commune des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela on va démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Cela fournit une définition théorique de l'intégrale qui permet à un ordinateur d'approcher le nombre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mais qui n'est pas la méthode principale étudier en terminale. Nous verrons plus loin le lien entre intégrales et primitives.

On démontre que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Preuve :
On rappel que nous nous sommes placé dans le cas particulier où la fonction f est continue positive et croissante. On a noté $p = 2^n$ et $l_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Notons $x_0, \dots, x_p$ la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ au rang n c'est-à-dire $x_k = a + kl_n$ pour tout $k \in 0, \dots, p$. On a en particulier $x_0 = a$ et $x_p = b$.
Puis pour tout entier n, on a : $s_n = \sum_{k=0}^{p-1} f(x_k)l_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{p} f(x_k)l_n$.
On a $S_n - s_n = l_n f(x_p) - l_n f(x_0) = l_n[f(b) - f(a)]$.
Or $\lim_{n\mapsto\infty} l_n = 0$, donc $\lim_{n\mapsto\infty}(S_n - s_n) = 0$.
Puis, au rang $n+1$ la subdivision utilisée est : $x_0, \dfrac{x_0 + x_1}{2}, x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \dfrac{x_{p-1} + x_p}{2}, x_p$.
Ainsi $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{p-1}[f(x_k) + f(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2})] \times \dfrac{l_n}{2}$.
Or f est croissante et $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} \geqslant x_k$.
Donc pour tout entier k inférieur à 2^n, $f(x_k) + f(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}) \geqslant 2f(x_k)$.
Par conséquent : $[f(x_k) + f(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2})] \times \dfrac{l_n}{2} \geqslant f(x_k) \times l_n$, et par suite $s_{n+1} \geqslant x_n$.
La suite (s_n) est donc croissante.
En remarquant que : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{p}[f(\dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}) + f(x_k)] \times \dfrac{l_n}{2}$, on montre que la suite (S_n) est décroissante.
On a ainsi démontré que les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes.
Dans le cas où f est décroissante sur $[a, b]$, on démontre le même résultat en échangeant le rôle des suites (s_n) et (S_n).

La démonstration de ce cas particulier peut être faite en cours, elle fait appel au cours sur les suites dans un cadre plus difficile pour les élèves compte tenu des notations plus lourdes que d'habitude.

Cette partie sur la construction théorique de l'intégrale ne constitue pas du tout le point essentiel du chapitre. On énoncera quand même le théorème admis suivant (qui constitue le cas générale) :

Théorème 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \dfrac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f(x_k)$ où $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{2^n}$. La suite $(S_n)_n$ est convergente, sa limite s'appelle (par définition) l'intégrale de f entre a et b et on la note $\int_a^b f(x)dx$.*

Remarque 1 *La variable "x" dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ est une variable muette, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\int_a^b f(y)dy$, $\int_a^b f(t)dt$ ...*

Il est bon d'insister dès le début sur cette remarque pour éviter que les élèves ne soient perdu au premier changement de notation (par exemple quand nous ferons le lien entre intégrale et primitive).

Cette partie devra être accompagné de graphique permettant de visualiser le lien entre la suite $(S_n)_n$ et l'aire sous la courbe.

Chapitre 4

Propriétés de l'intégrale

Començons par un petit rappel de la démarche suivie pour définir l'intégrale : nous voulions que l'intégrale coïncide avec l'aire sous la courbe, pour cela nous avons trouvé une suite approchant l'aire sous la courbe et nous avons définis l'intégrale au théorème 1. On énonce alors trois théorèmes admis pour mettre au point le lien entre l'intégrale et l'aire sous la courbe.

Théorème 2 *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b],(a \leqslant b)$. L'intégrale de f entre a et b est égale à l'aire (en unité d'aire) du domaine caractérisé par le système d'inéquations :* $\{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Théorème 3 *Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a,b],(a \leqslant b)$. L'intégrale de f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire (en unité d'aire) du domaine caractérisé par le système d'inéquations :* $\{a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Théorème 4 *Soit f une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle $[a,b],(a \leqslant b)$. La courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ détermine des domaines, situé de part et d'autre de l'axe des abscisses. L'intégrale de f entre a et b est égale (en unité d'aire) à la somme des aires des domaines situés au dessus de l'axe des abscisses diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses.*

Les propositions 1 et 2 suivantes se déduisent de la définition donné dans le théorème 1.

Proposition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a,b \in I$. On a :* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *et* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Proposition 2 *(linéarité de l'intégrale) Soient f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I et k un réel quelconque. On a :* $\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Proposition 3 *(Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a,b,c \in I$. On a :* $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. *Le nom de cette propriété viens de l'analogie avec la relation de Chasles pour les vecteurs.*

Cette proposition est admise à ce stade du cour, mais elle se visualise bien dans le cas d'une fonction de signe constant.
La démonstration sera immédiate à la suite du chapitre 5.

Théorème 5 *(Ordre et intégration) Soient f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.*
On a :
1)si f est positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
2)si f est négative sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$
3)si f est positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$
4)si pour tout réel x de $[a,b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Preuve :
1) et 2) se déduisent du théorème 1 puisque les termes $f(x_k)$ sont positifs dans le cas 1) et négatifs dans le cas 2).
3) se déduit du théorème 2 par contraposée : si f (étant positive) n'est pas nulle alors il y a «de l'aire» entre la courbe de f et l'axe des abscisses, car f est continue, et donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ n'est pas nulle.
Pour 4) on se ramène au cas 1) : on a $g-f$ positive sur $[a,b]$ donc $\int_a^b (g-f)(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ et par linéarité de l'intégrale on obtient $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ d'où le résultat.

Proposition 4 *(Valeur moyenne) Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I avec $a < b$.*
Notons $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. μ est la valeur moyenne de f entre a et b.
1)S'il existe deux réels m, M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors on a $m \leqslant \mu \leqslant M$.
En particulier,s'il existe m tel que pour tout $x \in I, f(x) \leqslant M$ alors $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant M|b-a|$.
2)Il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Preuve :
Montrons 1).
On intègre l'inégalité $m \leqslant f \leqslant M$ entre $a$et b, l'inégalité étant conservé par la proposition précédente.
On obtient $\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$ or m et M sont des constantes donc $\int_a^b m\mathrm{d}x = m(b-a)$ et $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$ et on obtient le résultat voulu en divisant par $(b-a)$.
Montrons 2) dans le cas où f est croissante.
Puisque f est croissante on a, pour tout x dans $[a,b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.
Par la proposition précédente, $f(a)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b)(b-a)$ et puisque $(b-a) > 0$ on obtient $f(a) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b)$.
Le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est donc dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$ donc il existe c dans $[a,b]$ tel que $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)$.

Chapitre 5

Lien entre intégrales et primitives

Il s'agit de la partie principale de ce cour d'intégration. On commence par des rappels sur les primitives. Une primitive d'une fonction f est une fonction F telle que $F' = f$. Si F est une primitive de f alors, pour tout réel k, la fonction $F + k$ est aussi une primitive de f. En revanche, pour une fonction continue, il n'extiste qu'une seule primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

On peut alors énoncer les deux théorèmes principaux de ce cours d'intégration.

Théorème 6 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est l'unique primitive sur I de la fonction f qui s'annule en a.*

Preuve :
Prouvons d'abord que F est dérivable en tout point x_0 de Iet que $F'(x_0) = f(x_0)$. Pour cela, étudions la limite en x_0 de la fonction T définie pour tout réel non nul h tel que $x_0 + h$ est dans I par : $T(h) = \dfrac{F(x_0 + h) + F(x_0)}{h}$.
On a : $F(x_0+h)+F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$
Et d'après la proposition précédente, il existe c dans $[x_0, x_0 + h]$ tel que :
$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = (x_0 + h - x_0)f(c) = hf(c)$ donc $T(h) = f(c)$.
Or lorsque h tend vers 0, c tend vers x_0 et puisque f est continue, $f(c)$, et donc $T(h)$, tend vers $f(x_0)$.
Ainsi $\lim_{h\mapsto 0} T(h) = f(x_0)$ donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
L'unicité vient du rappel : on a fixé la condition $F(a) = 0$.

Théorème 7 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tout éléments a et b de I on a : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Preuve :
D'après le théorème précédent, la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si F est une primitive quelconque de f sur I alors il existe une constante réel k telle que pour tout x dans I, $G(x) = F(x) + k$. Or $G(a) = 0$ donc $k = -F(a)$ et ainsi $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. En prenant $x = b$ on obtient $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

On écrit aussi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Remarque 2 *Le résultat du théorème précédent ne dépend pas de la primitive de f choisit car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f elle diffère d'une constante k et on a :*
$F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + k) - (F_2(a) + k) = F_2(b) - F_2(a)$.

Exemple 1 *Calculons l'intégrale $\int_{-2}^{3}(2x^2 - 5)\,dx$. Cette intégrale est bien définie puisque la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 5$ est continue sur $[-2, 3]$. La fonction f admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 5x$ sur $[-2, 3]$.*
D'après le théorème précédent on a : $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = [F(x)]_{-2}^{3} = F(3) - F(-2)$.
On écrit $\int_{-2}^{3}(2x^2 - 5)\,dx = [\frac{2}{3}x^3 - 5x]_{-2}^{3} = 3 - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$.

On peut aussi démontrer la relation de Chasles (proposition 3).
Preuve :
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Soient $a, b, c \in I$. Montrons que :
$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.
On a $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Le calcul d'intégrales par la recherche de primitive permet, en plus de travailler sur la notion d'intégrale en elle-même, de revenir à des exercices de calcul. On passera beaucoup de temps sur des exercices de calcul de primitives pour entrainer les élèves à effectuer une série d'opérations élémentaires sans erreurs. On remarque en effet que les calculs d'intégrales sont source de beaucoup d'erreurs de la part des élèves et même s'il connaissent la méthode, beaucoup ont du mal à trouver le résultat. On veillera aussi à ce que les élèves n'utilise pas trop leur calculatrice.

Enfin, je termine ce cour par la formule d'intégration par partie qui n'est plus au programme de terminale. Cette formule représente pour beaucoup d'élève un autre défi calculatoire.

Théorème 8 *(Intégration par partie) Soient u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux éléments de I alors on a :*
$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Ceci termine le cour d'intégration.

On se concentre ensuite sur des exercices. On commencera avec des exercices élémentaires faisant intervenir un point précis du cour, en augmentant progressivement la difficulté et en travaillant surtout la partie recherche de primitive.

Une fois les exercices illustrant le cours terminés on introduira deux points supplémentaires, pouvant figurer dans le cours mais que l'on peut aussi introduire en exercice : le calcul d'un volume et le calcule d'intégrales à borne infinies. On pourra aussi placer la formule d'intégration par partie à ce moment là si l'on décide d'en parler (elle n'est plus au programme). Par contre, on ne parlera pas de variable alétoire continue pour l'instant. On le fera dans un cours de probabilités, ce qui permettra de revenir sur l'intégration plus tard.

On prévoit également une séance de TP mettant en oeuvre des méthodes numériques de calcul d'intégrale.

Chapitre 6

Exercices

Ce chapitre contient une série d'exercices types. L'enseignement aux élèves demandera sans doute plus d'exercices que les 11 présentés ici et il ne faut pas hésiter à en faire plus. Le premier objectif est la compréhension du cours d'intégration mais on essaiera aussi de dévelloper la vitesse de calcul d'intégrale. Tout les exercices rencontrer font intervenir un calcul de primitive.
Les exercices 1 et 8 traitent de l'aire sous une courbe.
L'exercice 2 traite le cas des valeurs absolues.
Les exercices 3 à 6 se résument à la recherche de primitives.
L'exercice 7 utilise les relations d'ordre.
L'exercice 9 traite de l'intégration par partie.
L'exercice 10 traite d'intégrales non définies au sens donné dans ce cour.
L'exercice 11 est une ouverture vers le calcul de volume.

Chapitre 7

TP

TP : intégration numérique

Le but de ce TP est de présenter quelques méthodes d'intégrations numériques, c'est-à-dire de calcule approché d'intégrale. Nous utiliserons le logiciel scilab.

Les méthodes à implémenter seront rappelées au tableau.
Une méthode d'intégration numérique est dite d'ordre n si elle donne les valeurs exactes des intégrales des fonctions polynomiales de degrés n mais qu'elle est inexacte pour au moins une fonction polynomiale de degré $n+1$.

Nous allons comparer des méthodes d'intégrations numériques sur les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 définies respectivement sur $[0,1],[0,1]$ et $[0,2\pi]$ par :
$f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $f_2(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$ et $f_3(x) = |\cos x|$.
On note I_1, I_2 et I_3 les intégrales correspondantes.

1)Calculer les valeurs exactes de I_1, I_2 et I_3. Indication : une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est la fonction arctangente, notée *arctan* et qui est la réciproque de la fonction tangente sur l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$.

2)Tracer à l'aide de scilab les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3.

3)Pour chacune des méthodes d'intégrations numériques suivantes :écrire une fonction scilab réalisant la méthode d'intégration numérique, conjecturer à l'aide de scilab (puis éventuellement démontrer) l'ordre de la méthode, tester la méthode sur les intégrales I_1, I_2 et I_3.
Puis comparer les différentes méthodes entre elles (avec I_1, I_2 et I_3).

3)a) Les méthodes des rectangles : à gauche, à droite et avec le point milieu.
3)b) La méthode des trapèzes.
3)c) La méthode de Simpson, consistant à approcher $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par
$(b-a)(\dfrac{1}{6}f(a) + \dfrac{2}{3}f(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{1}{6}f(b))$.