

Les bases

Ce cours est destiné à tous les adultes quelques soit leur formation et leur niveau en maths, ainsi qu'aux lycéens. Pour les collégiens, seulement si vous êtes à l'aise en maths. Je ferai donc parfois des remarques qui paraîtront plus que superflues à tous ceux qui ont fait des études scientifiques, comme par exemple: je rappelle le sens de "si, et seulement si" en français. Il s'agit d'une équivalence: "je t'aide pour ton déménagement si, et seulement si tu m'aides pour mon déménagement" signifie que: si tu m'aides alors je t'aide, si tu ne m'aides pas alors je ne t'aide pas, si je t'aide alors tu m'aides, si je ne t'aide pas alors tu ne m'aides pas.

Ce cours est composé de 3 sections. La première est destinée à ceux pour qui les expressions $x \in A$, $A \subset B$, ou encore $A \cup B$, ne signifie rien, les autres peuvent s'en passer. La deuxième section est en quelque sorte une mise au point concernant quelque chose que nous pratiquons tous: la logique. Toute personne n'ayant pas suivi un cours de logique devra la lire, cela concerne en particulier tous ceux qui n'ont pas dépassé le bac. Enfin la troisième section est la plus importante car elle expose une boîte à outils pour faire des démonstrations.

Les sections 2 et 3 se terminent par des exercices dont le corrigé se trouve à la fin du cours. Faire des exercices est indispensable pour vérifier que l'on a bien assimilé le cours.

1 Ensembles et quantificateurs

Cette section sert surtout à définir des notations. Commençons par un paragraphe à destination de ceux qui ne connaissent pas les notations les plus fondamentales des mathématiques. La notion d'ensemble sera «définie» de manière intuitive. Un ensemble est une collection d'éléments dont on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble considéré, comme par exemple l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 5, l'ensemble des lettres de l'alphabet ou encore l'ensemble des jours de la semaine. On utilise une notation avec des accolades pour désigner les ensembles: l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 5 est noté $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quand l'ensemble à noter contient beaucoup d'éléments on peut suggérer l'idée à l'aide de point de suspension comme par exemple $\{a, b, \dots, z\}$ pour noter l'ensemble des lettres de l'alphabet. Un ensemble n'est pas ordonné. Deux ensembles ayant exactement les mêmes éléments sont dit égaux, par exemple $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ Pour dire qu'un élément appartient à un ensemble on utilise le symbole \in , et pour dire qu'un élément n'appartient pas à un ensemble on utilise le symbole \notin . Ainsi on a $1 \in \{1, 2, 3\}$ et $6 \notin \{1, 2, 3\}$. Si un ensemble contient un nombre fini d'éléments alors cet ensemble est dit fini et le nombre d'éléments qu'il contient s'appelle le cardinal de cet ensemble. Par définition un ensemble ne contient pas plusieurs fois le même élément, ainsi $\{1, 1, 1\} = \{1\}$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. L'ensemble de tout les nombres entiers $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ est infini. Il existe un ensemble particulier ne contenant aucun élément: l'ensemble vide, noté \emptyset .

On a fini par donner des noms aux ensembles les plus utilisés comme par exemple:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

\mathbb{Q} est l'ensemble des fractions.

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels (pour ceux qui ne voient pas de quoi il s'agit, on a entre autre: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$).

Il est commun pour les ensembles de nombre d'utiliser la notation $*$ à droite de l'ensemble pour dire "cet ensemble sans l'élément 0", ainsi $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, la notation $^+$ pour restreindre aux éléments positifs et la notation $^-$ pour restreindre aux éléments négatifs. Je rappelle que 0 est à la fois positif et négatif. Pour parler de nombres positifs (resp négatifs) mais non nuls on parle de nombres strictement positifs (resp négatifs), l'ensemble des entiers strictement négatifs se note donc \mathbb{Z}^{-*} ou \mathbb{Z}^{*-} . Attention aux expressions écrites en anglais! Les termes anglais "positive" (resp "negative") signifie strictement positif (resp négatif) en français et les anglais emploient les expressions "non negative" pour dire positif et "non positive" pour dire négatif.

Soient A et B deux ensembles. Lorsque tous les éléments A appartiennent à B alors on dit que A est inclus dans B , ou que B contient A , ou que A est un sous-ensemble de B , ce que l'on note $A \subset B$. Ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Avec cette définition, si $A = B$ alors $A \subset B$, et on a même $A = B$ si et seulement si ($A \subset B$ et $B \subset A$). Pour signifier que A est inclus dans B mais que A est différent de B on utilise le symbole \subsetneq et on dit que A est inclus strictement dans B .

Attention!!: les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ ne sont pas égaux, l'ensemble A contient 4 éléments: les nombres 1,2,3 et 4, alors que l'ensemble B contient 3 éléments: les nombres 1 et 4 et l'ensemble $\{2, 3\}$. De plus le nombre 1 n'est pas égale à l'ensemble $\{1\}$.

Si A et B désignent des ensembles alors on définit l'ensemble union de A et B , noté $A \cup B$ et prononcé " A union B ", comme étant l'ensemble dont les éléments sont les éléments de A et les éléments de B . On définit l'intersection de A et B , noté $A \cap B$ et prononcé " A inter B ", comme étant l'ensemble dont les éléments sont les éléments contenus à la fois dans A et dans B . On définit aussi l'ensemble $A \setminus B$, noté aussi $A - B$, prononcé " A privé de B " ou " A moins B ", comme l'ensemble dont les éléments sont les éléments qui se trouvent dans A mais qui ne sont pas dans B . Par exemple si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 6, 23, 112\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 23, 112\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$ et $B \setminus A = \{6, 23, 112\}$. Autre exemple: $\{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, $\{3, 4\} \cap \{-1, 0, 1\} = \emptyset$.

2 Quelques notions de logique

Le but de cette section est de présenter une partie des mathématiques commune à toutes les branches des maths: la logique. En fait la logique est présente partout tout le temps (pensez à toute les phrases en "Si..., alors...") et à l'école toute les matières mettent en œuvre la logique. En cours de français: si un participe passé est conjugué avec l'auxiliaire être alors il s'accorde en genre et en nombre avec le sujet. En anglais: si je veux exprimer une habitude alors j'utilise le présent simple. D'ailleurs les élèves ne reçoivent pas de cours de logique avant le Bac (il y en a néanmoins pour ceux qui font encore des maths après), ils s'en imprègnent quotidiennement. On pourrait dire que sa compréhension est inné chez l'être humain (tout de moins pour les raisonnements élémentaires). Un cours de logique est néanmoins très utile car il y a des méthodes de raisonnement auxquelles on ne pense pas forcément et il est bon de voir un résumé des différentes techniques de démonstration. Comme la logique ne se limite pas aux mathématiques, bon nombre d'exemples seront des phrases sans lien avec les maths.

En mathématiques on cherche à démontrer des résultats: pour démontrer un théorème, c'est-à-dire démontrer que l'énoncé du théorème est vrai, on part d'autres énoncés vrais et on utilise des propriétés ("Si..., alors...") vraies, la combinaisons des données et des propriétés démontrant la conclusion (le théorème est vrai). Un exemple classique: les hommes sont mortels, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel; la donnée est "Socrate est un homme", la propriété est "les hommes sont mortels" (autrement dit "si un être est un homme alors cet être est mortel") et la conclusion est "Socrate est mortel". Comme la démonstration d'un résultat repose sur d'autres résultats, on ne peut pas tout démontrer. Certains fait sont considérés comme vrais, sans démonstration, ce sont des axiomes (ou postulats). Deux questions se posent naturellement quant au choix des axiomes. Premièrement on peut se demander quels axiomes choisir pour fonder notre théorie de telle sorte que cette théorie repose sur le moins de fait admis possible, c'est-à-dire qu'il y ait le moins d'axiomes possible. Deuxièmement, et là on dépasse le cadre des mathématiques, quels axiomes est-il opportun d'adopter, c'est-à-dire que l'on ne fait pas juste des maths pour faire des maths, on veut que les maths nous soient utiles dans la vie, par exemple en physique ou en informatique, et il faut donc choisir des axiomes qui vont représenter la réalité.

Définition 1. Une proposition est une phrase qui admet une valeur de vérité: vraie ou fausse.

Exemple.

1. Il pleut.
2. J'ai un frère.
3. $1 + 1 = 2$
4. $1 + 1 = 3$
5. Tout nombre entier divisible par 4 est divisible par 2.

Définition 2. Le symbole \forall se lit "quel que soit" ou "pour tout", c'est le quantificateur universel. Le symbole \exists se lit "il existe", c'est le quantificateur existentiel.

Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition qui dépend d'un élément x de E . On définit les propositions

- $[\forall x \in E, P(x)]$ comme étant la proposition vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E .
- $[\exists x \in E, P(x)]$ comme étant la proposition vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E .

Une proposition écrite avec un maximum de symboles mathématiques est dite écrite en langage formel.

Si E est un ensemble et si on veut définir un ensemble dont les éléments sont les éléments de E vérifiant une certaine propriété P , alors on peut utiliser la notation

$$\{x \in E; P\}$$

Ici P est une propriété dont l'expression contient x et éventuellement des quantificateurs, et on ne précise pas "est vraie" après " P ".

Exemple.

En français	En langage formel
Tout entier naturel est plus petit que son carré	$\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x^2$
Il existe un nombre rationnel strictement supérieur à son cube	$\exists x \in \mathbb{Q}, x > x^3$
Il existe un entier naturel plus petit que tous les autres	$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, n \leq x$
L'ensemble des entiers compris entre 4 et 15	$\{x \in \mathbb{N}; 4 \leq x \leq 15\}$

Attention à l'ordre des quantificateurs lorsqu'on en utilise plusieurs car leur inversion peut changer la proposition: dire qu'il existe au moins un être humain plus vieux que tout les autres est différent de dire que quel que soit l'être humain choisi, il existe un être humain plus vieux que lui. En fait on peut intervertir les \forall entre eux, on peut intervertir les \exists entre eux, mais on ne peut pas intervertir les \forall avec les \exists .

Remarque élémentaire.

Dans un expression comme " $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$ " le choix des lettres n et x est arbitraire, on aurait tout aussi bien pu écrire " $\exists \alpha \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ". Néanmoins, même si chaque auteur est libre de choisir ses notations, certaines conventions se sont imposés: les ensembles sont souvent désignés par les lettres majuscules A, B, C, E, F, X , les espaces vectoriels par E, F, G , les groupes par G, H, K , les fonctions par f, g, h , s'il n'y a pas de contexte particulier comme par exemple la traditionnelle fonction f de la variable x des cours de maths. Mais dans un contexte particulier on utilisera d'autres notations: si votre fonction représente la vitesse d'un objet en fonction du temps il vaut mieux utiliser une notation $v(t)$ que $f(x)$ (v pour "vitesse" et t pour "temps"). Le but est de permettre aux lecteurs de suivre plus facilement un cours, un exposé, une démonstration...

Définition 3. Il y a trois connecteurs élémentaires, permettant de créer des propositions à partir d'autres propositions, il s'agit de:

- non
- ou
- et

Si P et Q désignent des propositions quelconques alors, par définition:

- la proposition ($\text{non } P$), appelée "négation de P ", est vraie si et seulement si P est fausse,
- la proposition (P ou Q), appelée "disjonction de P et Q ", est vraie si au moins une des deux propositions P, Q est vraie, et fausse sinon,
- la proposition (P et Q), appelée "conjonction de P et Q ", est vraie si et seulement si les deux propositions P, Q sont vraies.

Exemple.

Si P désigne la proposition "Il pleut" alors la proposition ($\text{non } P$) est "Il ne pleut pas".

L'ensemble des entiers relatifs strictement plus grand que 7 ou plus petit que -2 peut s'écrire $\{x \in \mathbb{Z}; x > 7 \text{ ou } x \leq -2\}$.

La proposition (P et Q) sera systématiquement notée avec des parenthèses (en plus de la police particulière du "et" car certain environnement sont entièrement écrit avec cette police), tout comme la proposition (P ou Q) afin d'éviter les confusions avec le "et" général de la langue française. Ainsi dans la phrase "Les propositions (P et Q) et (P ou Q) seront systématiquement notées avec des parenthèses." le "et" séparant (P et Q) de (P ou Q) ne sert pas à noter une proposition...

Remarque.

En mathématiques le "ou" est inclusif: "l'un ou l'autre ou les deux". Sauriez-vous construire à partir des trois connecteurs élémentaires un "ou exclusif"? C'est-à-dire un connecteur, notons le "xor" par exemple, tel que, si P et Q sont deux propositions, alors la proposition (P xor Q) est:

fausse si P, Q sont toutes les deux fausses
 fausse si P, Q sont toutes les deux vraies
 vraie si P est vraie mais que Q est fausse
 vraie si P est fausse mais que Q est vraie

Il est commode de représenter les valeurs de vérité dans un tableau que l'on appelle "table de vérité".
 Voici la table de vérité des connecteurs logiques élémentaires:

P	Q	$\text{non } P$	$(P \text{ et } Q)$	$(P \text{ ou } Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Table 1: table de vérité des connecteurs logiques élémentaires

Cette table de vérité se lit de la manière suivante. La première ligne indique les différentes propositions auxquelles on s'intéresse. Les deux premières colonnes comportent les combinaisons possibles de valeurs de vérité des deux propositions P et Q (P vraie et Q vraie, P vraie et Q fausse...) et les autres colonnes indiquent les valeurs de vérité des autres propositions en fonction de celles de P, Q (la troisième colonne, celle de $\text{non } P$, ne dépend pas de Q). Par exemple sur la dernière ligne on lit que lorsque P est fausse et Q est fausse alors ($\text{non } P$) est vraie, ($P \text{ et } Q$) est fausse, ($P \text{ ou } Q$) est fausse. Les valeurs de vérité de ($\text{non } P$), ($P \text{ et } Q$) et ($P \text{ ou } Q$) sont ce quelles sont par définition, et cette définition est choisie pour coller à l'intuition qu'on en a (sauf peut-être le "ou" inclusif, pour lequel tous le monde n'aurait peut-être pas choisi cette définition a priori). A l'aide de cette table de vérité on en déduit (cette fois ce n'est pas une définition) la proposition suivante.

Proposition 1.

P	Q	$\text{non}(P \text{ ou } Q)$	$((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q))$	$\text{non}(P \text{ et } Q)$	$((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V

En particulier, la proposition ($\text{non}(P \text{ ou } Q)$) a la même valeur de vérité que $((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q))$, et la proposition ($\text{non}(P \text{ et } Q)$) a la même valeur de vérité que $((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$.

Démonstration.

La construction d'une table de vérité ne présente pas de difficulté dès lors que l'on s'intéresse à des expressions courtes. Pour obtenir la colonne de la proposition $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ on part de la colonne ($P \text{ ou } Q$) de la table 1 et on échange les valeurs V et F car c'est l'effet de la négation. On procède de manière similaire pour les autres colonnes. Pour ceux qui s'embrouilleraient dans les tableaux, effectuez les opérations une par une à l'aide des définitions. Par exemple pour obtenir la colonne de $((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q))$, supposons P vraie et Q vraie, alors $\text{non } P$ est fausse et $\text{non } Q$ est fausse, donc $((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q))$ est fausse, puis supposons P vraie et Q fausse, alors $\text{non } P$...

Définition 4. Soient P et Q deux propositions.

- La proposition $P \Rightarrow Q$ (lire " P implique Q ") est définie par $((\text{non } P) \text{ ou } Q)$.
- La proposition $P \Leftrightarrow Q$ (lire " P équivalent à Q ") est définie par $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$.

Proposition 2. On a la table de vérité suivante:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\text{non}(P \Rightarrow Q)$	$(P \text{ et } (\text{non } Q))$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

La proposition $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ a donc la même valeur de vérité que $(P \text{ et } (\text{non } Q))$.

Remarque.

Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est nécessairement vraie, c'est le principe de déduction.

Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition suffisante pour avoir Q , et que Q est une condition nécessaire pour avoir P .

Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q . Dire que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie c'est dire que les propositions P et Q ont les mêmes valeurs de vérité: elles peuvent être vraie toutes les deux en même temps, ou fausse toutes les deux en même temps, mais il ne peut pas y en avoir une vraie alors que l'autre est fausse. Par exemple, pour toute proposition P , la proposition $(\text{non}(\text{non } P)) \Leftrightarrow Q$ est toujours vraie.

Selon l'usage on omet de préciser "est vraie" pour dire des phrases du type "Montrons que $P \Rightarrow Q$ est vraie" ou "Supposons que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie", on dit seulement "Montrons que $P \Rightarrow Q$." ou "Supposons que $P \Leftrightarrow Q$.", mais bien entendu on précise "est fausse" dans "Montrons que $P \Rightarrow Q$ est fausse" et on précise "est vraie" dans la formulation "Montrons que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie."

Proposition 3. Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x de E . Alors:

$$\begin{aligned} \text{non}(\forall x \in E, P(x)) &\Leftrightarrow (\exists x \in E, (\text{non } P(x))). \\ \text{non}(\exists x \in E, P(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, (\text{non } P(x))). \end{aligned}$$

Exemple.

Une proposition	et sa négation
$\forall x \in \mathbb{N}, n < n^2$	$\exists x \in \mathbb{N}, x \geq x^2$
$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq n$	$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, x > n$

Il nous reste encore deux propositions particulières à voir.

Définition 5. Soient P et Q deux propositions.

- La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est (par définition) la proposition $Q \Rightarrow P$.
- La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est (par définition) la proposition $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

Remarque.

- Une proposition est différente de sa réciproque: quand j'affirme (c'est-à-dire que je considère vraie) "s'il pleut alors je prends mon parapluie", je n'affirme pas "si je prends mon parapluie alors c'est qu'il pleut". Nous avons défini $P \Rightarrow Q$ comme étant $((\text{non } P) \text{ ou } Q)$ donc à partir du moment où P est fausse, la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. Donc s'il ne pleut pas, alors la proposition "s'il pleut alors je prends mon parapluie" est vraie, que je prenne ou non mon parapluie.
- Par contre une proposition et sa contraposée sont égales au sens où elles ont la même valeur de vérité. En effet on a par définition

$$(((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)) = (\text{non}(\text{non } Q) \text{ ou } \text{non } P) = (Q \text{ ou } \text{non } P) = (P \Rightarrow Q))$$

Exercices.

1. On suppose que la proposition "S'il pleut alors j'ai un parapluie." est vrai. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
 - (a) J'ai un parapluie s'il pleut.
 - (b) Je n'ai pas de parapluie ou il pleut.
 - (c) Il suffit qu'il pleuve pour que j'ai un parapluie.
 - (d) S'il ne pleut pas, je n'ai pas de parapluie.
 - (e) Il est nécessaire qu'il pleuve pour que j'ai un parapluie.
 - (f) Il ne pleut pas ou j'ai un parapluie.

- (g) Il faut qu'il pleuve pour que j'ai un parapluie.
 (h) Je n'ai pas de parapluie et il pleut.
 (i) Si je n'ai pas de parapluie, il ne pleut pas.
2. Convertissez les assertions suivantes en langage formel ou en français suivant le cas, puis donnez la négation de chacune d'elles en langage formel. *On ne demande pas pour l'instant de montrer si ces assertions sont vraies ou fausses, ce sera un exercice de la section suivante.*
- (a) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
 (b) Il existe un entier multiple de tous les autres.
 (c) Si n^2 est pair, alors n est pair.
 (d) Une condition suffisante pour qu'un nombre réel ait une racine carré est qu'il soit supérieur ou égale à 1.
 (e) $\forall x \in \mathbb{R} : [(\exists y \in \mathbb{R} : x = y^2) \Rightarrow x \geq 0]$.
3. On considère la proposition " $\forall x \in \mathbb{Z}, [24 \text{ divise } x] \Rightarrow [4 \text{ et } 6 \text{ divisent } x]$ ". Est-elle vraie ou fausse? Donnez sa réciproque, est-t-elle vraie ou fausse? Donnez sa contraposée, est-t-elle vraie ou fausse? *En cas de difficultés, revenez sur cet exercice après avoir lu la section suivante.*
4. Le théorème de Pythagore est "Si un triangle est un triangle rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés." Donnez la réciproque du théorème de Pythagore et dite, sans démonstration, si elle est vraie ou fausse. Donnez la contraposée du théorème de Pythagore, est-t-elle vraie ou fausse?
5. Construisez à partir des trois connecteurs élémentaires un "ou exclusif", C'est-à-dire un connecteur, notons le "xor" par exemple, tel que, si P et Q sont deux propositions, alors la proposition $(P \text{ xor } Q)$ est:
 fausse si P, Q sont toutes les deux fausses
 fausse si P, Q sont toutes les deux vraies
 vraie si P est vraie mais que Q est fausse
 vraie si P est fausse mais que Q est vraie
6. Convertissez la proposition "il existe un unique entier naturel plus petit que tout les autres" en langage formel. *On rencontre parfois le symbole $\exists!$ qui signifie "il existe un unique", mais on peut l'exprimer à l'aide des deux quantificateurs élémentaires et des connecteurs logiques.*

3 Méthodes de démonstration

Dans toute cette section E désigne un ensemble et P, Q et R désignent des propositions. Si P dépend d'un paramètre x de E alors on la notera $P(x)$. Les différentes méthodes de raisonnement exposées ici ne sont bien entendues pas exclusivement réservés à la pratique des mathématiques, mais les exemples et les exercices illustrant les méthodes sont de nature mathématique.

Raisonnement par implication:

On applique le principe de déduction. On cherche à montrer que Q est vraie. Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. On peut bien sûr enchaîner les implications: si on cherche à montrer que R est vraie en sachant que P est vraie, on peut chercher un propriété intermédiaire Q telle que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraie. C'est notamment le cas lorsque la proposition que l'on cherche à démontrer est une implication.

Exemple.

Montrons que $[\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, or le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Le contre-exemple:

On cherche à montrer qu'une proposition de type $\forall x \in E, P(x)$ est fausse. Il suffit de trouver un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse. Plus généralement, la recherche d'un contre-exemple est intéressante pour

aborder les questions ouvertes du type "La proposition $\forall x \in E, P(x)$ est-elle vraie?". En effet, s'il existe un contre-exemple simple alors la résolution du problème sera très rapide et il est donc judicieux de risquer de perdre un peu de temps à chercher un contre-exemple élémentaire et de tenter ensuite de démontrer que le résultat est vraie si on n'en trouve pas, plutôt que de perdre du temps à tenter de démontrer que la propriété est vraie et de chercher ensuite un contre-exemple si l'on n'a pas réussi. De plus, le fait de chercher un contre-exemple alors que la proposition est vraie permet parfois de comprendre ce qui fait que la proposition est vraie.

Exemple.

Est-ce que tout nombre réel est plus petit que son carré? Non, le nombre 0,5 est un contre-exemple: $0,5^2 = 0,25 < 0,5$.

Raisonnement par équivalence:

On cherche à montrer que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, ou à savoir quant est-ce que cette équivalence est vraie. L'idée est de procéder par équivalences successives. On cherche des propositions P_1, P_2, \dots, P_n telles que les équivalences $P \Leftrightarrow P_1, P_1 \Leftrightarrow P_2, \dots, P_n \Leftrightarrow Q$ soient vraies. Ce raisonnement est bien adapté lorsque les propriétés P, P_1, \dots, P_n, Q s'écrivant facilement en langage formel et que le passage d'une équivalence à l'autre est facile (on suppose souvent que le lecteur comprendra l'enchaînement des équivalences sans qu'il n'y ai rien à préciser), c'est notamment le cas pour certains enchaînements d'équations. Par contre ce type de raisonnement a tendance à être source d'erreurs lorsqu'il y a des petites subtilités comme par exemple une division par un élément qui peut être nul, donc il faut être vigilant...

Exemple.

Résolvons l'équation $7x - 3 = 2x + 7$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$7x - 3 = 2x + 7 \Leftrightarrow 7x = 2x + 10 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc 2 est la solution de l'équation.

Raisonnement par double-implication:

On cherche à montrer que $P \Leftrightarrow Q$. On utilise deux raisonnements directs, un pour montrer $P \Rightarrow Q$ et l'autre pour montrer $Q \Rightarrow P$. Ce raisonnement s'utilise plus fréquemment que le raisonnement par équivalence parce que le raisonnement par équivalence nécessite que les arguments prouvant les deux implications sous-jacentes soient très similaires.

Exemple.

Résolvons l'équation $7x - 3 = 2x + 7$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$7x - 3 = 2x + 7 \Rightarrow 7x = 2x + 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

Ensuite on vérifie que 2 est bien solution de l'équation: $7 \times 2 - 3 = 11 = 2 \times 2 + 7$. Donc 2 est la solution de l'équation.

Raisonnement par contraposée:

On cherche à montrer que $P \Rightarrow Q$. Et comme $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$, on va plutôt montrer $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$.

Exemple.

Montrons que $[\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}]$. On va montrer que $[\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}]$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. La différence de deux nombres rationnels est un nombre rationnel donc $1 + x - 1 \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire $x \in \mathbb{Q}$.

Raisonnement par l'absurde:

On cherche à montrer que P est vraie. On va supposer que P est fausse et essayer d'aboutir à une contradiction avec quelque chose que l'on sait être vrai. Le raisonnement par l'absurde est plutôt pratique pour montrer que quelque chose n'existe pas.

Exemple.

Dans cet exemple l'utilisation d'un raisonnement par l'absurde est clairement superflu, mais c'est pour l'exemple. Montrons qu'il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres. Supposons qu'il existe un

entier N plus grand que tous les entiers. Alors, comme $N + 1$ est un entier, on a $N + 1 \leq N$ donc $1 \leq 0$. Contradiction. Donc il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres.

Raisonnement par disjonction des cas:

On veut montrer que P est vraie, on se lance dans une démonstration (par implication, par l'absurde... peu importe) et à un moment on peut se retrouver avec plusieurs possibilités et on étudie les différents cas possibles.

Exemple.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas selon la parité de n .

- Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ et alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{(2k+1) \times 2 \times (k+1)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par analyse-synthèse:

Ce type de raisonnement permet de s'attaquer aux problèmes ouverts demandant de trouver tous les éléments d'un ensemble donné qui satisfont une propriété donnée: "déterminer les éléments $x \in E$ qui vérifient la propriété $P(x)$ ". Ici on ne cherche pas à montrer que..., on cherche! On commence par chercher une ou plusieurs propriétés (autre que P évidemment) qu'un élément $x \in E$ doit vérifier pour que $P(x)$ soit vrai, ce sont des conditions nécessaires, et ensuite on vérifie si ces conditions sont suffisantes.

Exemple.

Résolvons l'équation $\sqrt{2-x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation (en fait une formulation vraiment rigoureuse serait "Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation." puisqu'on ne sait pas a priori si cette équation possède une solution, mais en pratique on écrit de cette façon). Alors on a $2-x = x^2$ (on a élevé au carré les deux membres de l'équation) donc $x = -2$ ou $x = 1$ (ce type d'équation est étudié en première actuellement, pour ceux qui n'ont jamais vu ces équations, constatez que 1 et -2 sont bien solutions de $2-x = x^2$ et admettez qu'il ne peut y en avoir d'autres). Réciproquement on teste si -2 et 1 sont solutions de l'équation (de départ), 1 l'est mais -2 ne l'est pas. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{1\}$.

Raisonnement par récurrence:

Nous ne traiterons pas ce type de raisonnement dans ce cours... Sachez que c'est un raisonnement permettant de démontrer des propositions " $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ " comme par exemple "Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

Exercices.

1. On reprend l'exercice 2 de la section 2. Dites si les assertions sont vraies ou fausses, en justifiant vos réponses.
2. P, Q, R désignent des propositions, quelle méthode de raisonnement est basée sur le fait que:
Si $(P \text{ ou } Q)$ et $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ sont vraie, alors R est vraie.
Quelle méthode de raisonnement est basée sur le fait que:
Si $[((\text{non } P) \Rightarrow Q) \text{ et } ((\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q))]$ est vraie, alors P est vraie.
3. Montrez que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
4. Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers.
5. Résoudre l'équation $\sqrt{2-7x} = 3x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Remarque.

Toutes les mathématiques ne sont pas fondées sur les mêmes axiomes de la logique!!! J'ai présenté dans ce cours la logique des mathématiques dites "classiques", qui est le courant majoritaire. Mais il est bon de parler un peu des mathématiques dites "constructives" car en fait même dans les mathématiques classiques on essaie d'être aussi constructif que possible. Ces deux approches des maths ne sont pas contradictoires au sens où une proposition ne peut pas être vraie avec une approche et fautive avec l'autre. Une proposition peut être vraie dans les deux, fautive dans les deux, vraie dans l'une et non démontrée dans l'autre, fautive dans l'une et non démontrée dans l'autre. Sans entrer dans les détails disons simplement que les mathématiques constructives ne sont pas fondées sur le principe du tiers exclu. Le principe du tiers exclu stipule que: soit une proposition est vraie, soit la négation de cette proposition est vraie. Il n'y a pas de "troisième alternative". Mais attention, en mathématiques constructives on démontre que le principe du tiers exclu est irréfutable, donc même en mathématiques constructives une proposition et sa négation ne peuvent pas avoir la même valeur de vérité. Ainsi en mathématiques constructives on ne peut pas démontrer une proposition en raisonnant sur sa négation, il n'y a donc pas de raisonnement par l'absurde ou par contraposée. Il y a également une subtilité concernant les disjonctions de cas que je résumerai par: il faut avoir un test permettant de déterminer dans quel cas on se trouve. Terminons cette remarque par mettre évidence le reproche principal que l'on peut faire aux mathématiques classiques. Supposons qu'on veuille montrer qu'une certaine équation possède une solution. En mathématiques classiques on pourra raisonner par l'absurde: on suppose que l'équation n'a pas de solution et on aboutit à une contradiction. Alors on en déduit que l'équation a une solution. Mais quelle est cette solution? On n'en sait rien! En mathématiques constructives on veut forcément "construire" une solution. Pour ceux qui veulent en savoir plus, cherchez "principe du tiers exclu" ou "mathématiques constructives" sur internet.

4 Corrigé des exercices

Exercices de la section 2:

- Vraie.
 - Faux, car le "ou" est inclusif.
 - Vraie.
 - Faux.
 - Faux.
 - Vraie.
 - Faux.
 - Faux.
 - Vraie.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} : n < N$ (on pourrait remplacer les " \mathbb{N} " par des " \mathbb{Z} " car le terme "entier" n'est pas précis sans contexte, les termes précis sont "entier naturel" et "entier relatif")
Négation: $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N} : n \geq N$
 - $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists d \in \mathbb{N} : N = nd$
Négation: $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N} : N \neq nd$
 - $\forall n \in \mathbb{N} : [n^2 \text{ est pair}] \Rightarrow [n \text{ est pair}]$
Négation: $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ est pair et } n \text{ est impair}$
(car $P \Rightarrow Q$ signifie (*non P*) ou *Q*)
 - $\forall x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2) \Rightarrow x \geq 1$
Négation: $\exists x \in \mathbb{R} : [(\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2) \text{ et } x < 1]$
 - Le carré d'un nombre réel est positif.
Négation: $\exists x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R} : x = y^2) \text{ et } x < 0$.
- On a $24 = 4 \times 6$ donc 4 et 6 divisent 24, donc tout nombre divisible par 24 est aussi divisible par 4 et par 6, donc la proposition est vraie. La réciproque de la proposition est " $\forall x \in \mathbb{Z}, [4 \text{ et } 6 \text{ divisent } x] \Rightarrow [24 \text{ divise } x]$ ". La réciproque est fautive car 12 est divisible par 4 et par 6 mais n'est pas divisible par 24. La contraposée de la proposition est " $\forall x \in \mathbb{Z}, [4 \text{ et } 6 \text{ ne divisent pas } x] \Rightarrow [24 \text{ ne divise pas } x]$ ". La contraposée est vraie, car la proposition est vraie.

4. La réciproque du théorème de Pythagore est "Si le carré de la longueur de l'hypothénuse d'un triangle est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres cotés alors ce triangle est rectangle.", la réciproque est vraie. La contraposée du théorème de Pythagore est vraie puisque le théorème de Pythagore est vrai, on peut l'écrire "Si dans un triangle, le carré de la longueur de l'hypothénuse n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres cotés alors ce triangle n'est pas rectangle."
5. $(P \text{ xor } Q) = \text{non}(((\text{non } P) \text{ ou } Q) \text{ et } ((\text{non } Q) \text{ ou } P))$. En fait $(P \text{ xor } Q) = \text{non}(P \Leftrightarrow Q)$.
6. $\exists n \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N} : n \leq m) \text{ et } [(\forall n' \in \mathbb{N} : \forall m' \in \mathbb{N}, n' \leq m') \Rightarrow n = n']$

Exercices de la section 3:

Avant de lire la correction, voici quelques indications pour retenir certains exercices en cas d'échecs. Pour le 1.c, raisonner par contraposée. Pour le 3, raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{(2)} = \frac{p}{q}$ sous forme irréductible (c'est-à-dire que p et q sont les plus petits entiers positifs possibles). Pour le 4, raisonner par l'absurde. Pour le 5, raisonner par analyse et synthèse et pour ceux qui ne savent pas résoudre les équation du second degré, cherchez "équation du second degré" sur internet.

1. (a) La proposition est vraie
 (b) La proposition est fausse car un entier multiple de tous les autres serait en particulier plus grand que tous les autres, ce qui est impossible comme nous l'avons vu.
 (c) Montrons par contraposée que la proposition est vraie. Considérons un entier n impair et montrons qu'alors n^2 est impair. Comme n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ (un nombre pair est un nombre entier divisible par 2 et un nombre impaire est égale à un nombre pair plus 1). On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 2 \times 2(k^2 + k) + 1$, qui est donc impair.
 (d) C'est faux: $0 = 0^2$ et $0 < 1$. En fait tout nombre positifs possède une racine carré.
 (e) C'est vrai car un carré est toujours positifs (le produit de deux nombres positifs est positif, le produit de deux nombres négatifs est positif).
2. Le premier cas est la disjonction de cas, le deuxième est le raisonnement par l'absurde.
3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{(2)}$ est rationnel. Alors il existe deux entiers positifs premier entre eux p et q (c'est-à-dire que 1 est le seul entier positifs divisant à la fois p et q) tels que $\sqrt{(2)} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$, que l'on réécrit $2q^2 = p^2$, ce qui signifie que p^2 est pair, donc que p est pair (nous l'avons démontré dans le premier exercice de cette section). Ainsi il existe un entier k tel que $p = 2k$, donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, donc $2k^2 = q^2$ donc q^2 est pair, donc q est pair (comme p) donc 2 divise p et q : contradiction avec le fait que nous avons pris p et q premiers entre eux.
4. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Notons A cet ensemble fini de tous les nombres premiers. Alors on fait le produit de tous ces nombres premiers, notons N ce produit. Le nombre $N + 1$ est alors un autre nombre premier. En effet $N + 1 \notin P$ car par construction $N + 1$ est strictement plus grand que tous les éléments de P , et si $p \in P$ divise $N + 1$ alors comme p divise N par construction, on doit aussi avoir p divise 1, ce qui est impossible car $p \geq 2$.
5. On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse: Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sqrt{2 - 7x} = 3x$. Alors, en élevant au carré, on a $2 - 7x = 9x^2$, que l'on réécrit $9x^2 + 7x - 2 = 0$. C'est une équation du second degré dont le discriminant vaut $121 = 11^2$. Ses solutions sont donc $\frac{-7 \pm 11}{2 \times 9}$ c'est-à-dire $\frac{2}{9}$ et -1 .

Synthèse: On vérifie si $\frac{2}{9}$ et -1 sont solutions. La racine carré d'un nombre réel est toujours positive donc -1 n'est pas solution ($3 \times (-1) = -3 < 0$). On a $\sqrt{2 - 7 \times \frac{2}{9}} = \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{9}$.

Conclusion: $\frac{2}{9}$ est l'unique solution de l'équation.